研究論文 · RESEARCH PAPER

排班的藝術



協力衝榜車隊的人力排程：形式模型、分配機制與模擬評估

The Art of the Roster: Formal Models, Allocation Mechanisms and Simulation of Shift Scheduling in Co-operative Leaderboard Convoys

研究對象	《世界計畫》台服車隊的排班實務與菜根機器人排位程序（b2026-11-09r）
研究方法	形式化建模、命題證明、蒙地卡羅模擬、榜線高頻快照分析
主要結果	六個命題・一個規則衝突的邊界情況・效率與公平的取捨曲線

Project SEKAI 資源中心 研究組
以本站公開資料庫為基礎編纂

2026 年 11 月　初版

摘　要

在《世界計畫 繽紛舞台！》台灣伺服器，衝榜玩家以「車隊」為單位，把活動期間切成一小時一格的班次，由志願的推手輪流坐進跑者的協力 Live 房間。每一格只有四個推手座位（P2–P5），報名者的隊伍倍率、身分（一般推手或 S6）、同時操作的帳號數（單開、雙開、三開）與報名先後各不相同，因此每一格都要解一次小型的分配問題。本文把這個實務稱為「排班的藝術」，並嘗試以作業研究與機制設計的語言把它說清楚。

本文的貢獻有四。第一，我們把車隊排班形式化為一個帶有特殊座位、多單位代理人與優先序的單時段分配問題，並以菜根機器人實際採用的排位程序為對象，寫出其演算法。第二，我們證明這個程序的五個性質：歷史無關性（任何變動後的結果只取決於當下的報名集合）、族群單調性、倍率級距造成的效率損失上界（每席不超過級距寬度 δ）、「不同人優先」政策的最壞效率比下界 $(b_{\max}+2b_{\min})\div 3b_{\max}\approx 0.536$，以及在沒有跨時段限制時逐格貪婪即為全域最佳、在有個人時數上限時可化為最小成本流問題。第三，形式分析揭露了一個邊界情況：坐上 P2 的雙開推手，其第二開會在「不同人優先」的第一階段插隊；我們給出反例、量化其頻率（模擬中占 1.7%–5.5% 的時段），並指出它正是級距損失上界在實作中失效的原因。第四，以蒙地卡羅模擬（每組設定 2 萬至 5 萬個時段）比較排位政策：在報名人數期望值為 6 時，「倍率優先」比「先報先上」的座位倍率總和高 5.7%，但各倍率五分位的上車率從 23% 到 99% 不等，吉尼係數 0.278；先報先上則幾乎完全平均（0.031）。這個效率與公平的取捨隨競爭程度擴大。最後，我們結合台服榜線的日夜增分剖面，論證深夜班次的「相對排名收益」可達白天的數倍，並討論排班作為一種社會契約的倫理與健康議題。

關鍵詞　人員排班；分配機制；優先序；公平的代價；最小成本流；同儕生產；節奏遊戲；車隊

Abstract

Competitive players on the Taiwan server of *Project SEKAI COLORFUL STAGE!* organise themselves into “convoys” that split an event into one-hour shifts, in which volunteer “pushers” take turns joining a runner’s co-operative live room. Each shift has only four pusher seats, and applicants differ in team multiplier, role, number of simultaneously operated accounts and application time, so every shift poses a small allocation problem. This paper studies this practice, which we call the art of the roster, in the language of operations research and mechanism design.

We formalise convoy scheduling as a single-slot allocation problem with a special seat, multi-unit agents and priorities, and write down the seating procedure actually used by the Caigen Discord bot. We prove five properties of the procedure: history independence, population monotonicity, a per-seat efficiency loss bound of δ caused by multiplier binning, a worst-case efficiency ratio of $(b_{\max} + 2b_{\min})/3b_{\max} \approx 0.536$ for the “distinct persons first” policy, and the global optimality of slot-wise greedy assignment without cross-slot constraints, together with a min-cost-flow formulation when per-person hour caps are added. The formal analysis also reveals an edge case in which the second account of a multi-account pusher seated at P2 jumps the queue in the first pass; we give a counterexample, measure its frequency (1.7%–5.5% of simulated slots) and show that it is exactly what breaks the binning bound in practice. Monte Carlo simulation shows that multiplier-priority seating yields 5.7% more total seat multiplier than first-come-first-served at an expected six applicants per slot, at the cost of seat rates ranging from 23% to 99% across multiplier quintiles (Gini 0.278 against 0.031). Combining these results with the diurnal score profile of the server, we argue that late-night shifts carry several times the relative ranking value of daytime shifts, and discuss scheduling as a social contract.

Keywords: staff scheduling; allocation mechanisms; priority rules; price of fairness; min-cost flow; peer production; rhythm games

目　次

第一章　緒論 6
1.1　問題的起點 6
1.2　研究問題 6
1.3　研究對象與方法 6
1.4　主要貢獻 7
1.5　本文結構 7

第二章　文獻回顧 8
2.1　人員排班與輪值 8
2.2　不可分割資源的分配與優先序機制 8
2.3　公平的代價 9
2.4　集體行動與同儕生產 9
2.5　遊戲中的玩家勞動 9
2.6　演算法與人的判斷 9

第三章　情境：車隊排班的實務 11
3.1　協力房間的座位結構 11
3.2　一格班次的生命週期 11
3.3　可調整的排位規則 12
3.4　多帳號（多開） 12
3.5　車隊佔位與外援 13

第四章　形式模型 14
4.1　基本記號 14
4.2　分配與可行性 14
4.3　目標 15
4.4　優先序 15
4.5　跨時段的問題 15

第五章　排位機制與其性質 16
5.1　演算法 16
5.2　一致性與單調性 16
5.3　倍率級距的效率代價 17
5.4　形式分析揭露的邊界情況 18
5.5　「不同人優先」的效率代價 19
5.6　誘因 20

第六章　模擬評估 **21**
6.1　實驗設計 21
6.2　競爭程度與效率 21
6.3　參與廣度 22
6.4　公平的代價 23
6.5　上車機會的分配 23
6.6　級距的影響 24
6.7　模擬的限制 25

第七章　時間維度：班次的價值與跨時段最佳化 **26**
7.1　每一小時都一樣嗎 26
7.2　稀缺與價值的錯位 27
7.3　跨時段的排班問題 27
7.4　小結 28

第八章　討論：排班作為社會契約 **29**
8.1　效率與公平的雙重目標 29
8.2　誠實申報與聲譽 29
8.3　人在迴路中 30
8.4　互惠、義務與健康 30
8.5　研究限制 30

第九章　結論 **31**
9.1　主要發現 31
9.2　對實務的建議 31
9.3　未來研究 32
9.4　結語 32

參考文獻 **33**

附錄 A　模擬設定與重現 **34**

附錄 B　一致版兩階段政策 **35**

圖表目次

圖

圖 3-1　一個時段的座位結構
圖 3-2　一格班次的生命週期
圖 6-1　平均座位倍率（P2–P5）與每格報名人數期望值 λ 的關係
圖 6-2　P2–P5 上不同成員數與 λ 的關係
圖 6-3　程序公平的代價：先報先上相對於倍率優先的座位倍率總和損失比例
圖 6-4　λ = 6 時各倍率五分位的上車率（上車次數 ÷ 報名次數）
圖 7-1　各小時的相對排名收益指數 G(h) = 1 ÷ ρT100(h)（台灣時間），第 175–184 期共 10 期活動

表

表 2-1　傳統人員排班與車隊排班的比較
表 3-1　與排位相關的車隊設定（菜根機器人）
表 4-1　記號
表 6-1　模擬的主要參數
表 6-2　λ = 6 時四種政策的比較
表 6-3　各政策下的上車率分布
表 6-4　倍率級距寬度 δ 的影響（λ = 6）
表 A-1　完整模擬參數

第一章

緒論

1.1　問題的起點

一期《世界計畫》活動大約持續八天，也就是將近兩百個小時。對一位想要衝進前段名次的跑者而言，這兩百個小時的每一小時，都希望房間裡坐滿四位隊伍強大的推手；但沒有任何一位推手能陪跑兩百個小時。台服玩家社群的解決方法，是把時間切碎：一小時一格，推手依自己的作息報名，管理者再把報名者排進座位。這個被稱為「排班」的日常實務，決定了一台車每小時能拿到多少分數，也決定了誰有機會上車、誰只能候補。

排班看似瑣碎，卻同時牽涉到三個學術上成熟的領域。從**作業研究**的角度，它是一個人員排程（staff scheduling）問題：在容量限制下，把人力分配到時段以最大化產出。從**機制設計**的角度，它是一個不可分割資源的分配問題：座位稀缺，報名者有不同的「類型」（倍率），分配規則決定了誰得到座位，也決定了報名者是否有誘因誠實申報自己的類型。從**社會學**的角度，它是一種同儕生產（peer production）：一群沒有金錢報酬的志願者，透過共同的規範與工具，協力完成一個任何個人都無法獨力完成的目標。

本文把這種實務稱為「排班的藝術」。之所以稱為藝術，是因為在實務中，排班規則往往是社群一次次試錯累積出來的經驗法則：倍率高的人先上、S6 坐 P2、雙開不能擠掉別人、倍率差不多就看誰先報……這些規則各自有道理，但它們合在一起時會產生什麼性質、彼此之間有沒有衝突、在不同的競爭程度下表現如何，很少被系統性地檢驗。本文的目的，就是把這門藝術轉譯成可以被分析、被證明、被模擬的形式。

1.2　研究問題

1. **RQ1　形式化：**車隊排班可以被寫成什麼樣的數學問題？實務中的排位程序對應於什麼樣的演算法？
2. **RQ2　性質：**這個排位程序具有哪些可證明的性質（一致性、單調性、效率損失的上下界）？是否存在規則之間的衝突？
3. **RQ3　政策比較：**不同的排位政策（倍率優先或先報先上、多開如何排、倍率級距寬度）在效率與公平之間如何取捨？這個取捨如何隨競爭程度改變？
4. **RQ4　時間維度：**不同時段的班次是否具有不同的價值？跨時段的排班可以如何最佳化？

1.3　研究對象與方法

本文的分析對象是菜根機器人（一個服務台服車隊的 Discord 機器人）的排班系統。選擇它的理由有二：第一，它的排位規則以程式碼的形式明確存在，可以逐條對照並形式化；第二，它被多個車隊實際使

用，其規則本身就是社群經驗的凝結。我們的資料來源包括該機器人的排位程式碼（截至版本 b2026-11-09r）、公開的使用手冊，以及 Project SEKAI 資源中心公開的台服榜線資料。

研究方法分為三部分。第一部分是**形式分析**：定義模型、寫出演算法、證明性質。第二部分是**模擬實驗**：由於各車隊的實際班表涉及成員個人資料、並未公開，本文以參數化的合成資料進行蒙地卡羅模擬，比較不同政策；所有參數與假設都明列於附錄，結論的適用範圍也受這些假設限制。第三部分是**實證連結**：以台服 10 期活動的高頻榜線快照，估計不同時段的相對增分速率，作為班次價值分析的依據。

1.4　主要貢獻

- 提出車隊排班的形式模型，並把實務程序寫成演算法 1（第四、五章）。
- 證明五個命題，涵蓋歷史無關性、族群單調性、級距損失上界、「不同人優先」的最壞效率比，以及跨時段問題的可解性（第五、七章）。
- 以形式分析發現並量化一個規則衝突的邊界情況，並提出一行層級的修正（第五章）。
- 以模擬量化效率與公平的取捨，並給出「公平的代價」隨競爭程度變化的曲線（第六章）。
- 結合榜線資料，提出班次的「相對排名收益指數」（第七章）。

1.5　本文結構

第二章回顧相關文獻。第三章描述車隊排班的實務情境。第四章建立形式模型。第五章寫出排位演算法並證明其性質。第六章報告模擬實驗。第七章討論時間維度與跨時段最佳化。第八章綜合討論效率、公平、誘因與社群規範。第九章總結。附錄列出模擬參數與修正後的演算法。

第 二 章

文獻回顧

2.1　人員排班與輪值

人員排班是作業研究中歷史最悠久的應用領域之一。Ernst 等人（2004）回顧了涵蓋醫療、交通、客服、零售等產業的數百篇文獻，把排班問題拆解為需求預測、班型設計、班次指派等階段。其中最常被研究的是護理人員輪值（nurse rostering）：Burke 等人（2004）指出，護理輪值同時具有硬限制（每班的人數下限、法定休息時間）與軟限制（個人偏好、班次公平），通常以整數規劃或啟發式搜尋求解，而且在一般形式下是 NP 困難的。

車隊排班與護理輪值有明顯的相似之處：都以時段為單位、都有每班的人數上限、都必須兼顧個人的可用時間。但兩者也有三點根本差異。第一，車隊的「員工」是志願者，沒有雇傭關係，排班者無法要求任何人上班，只能在報名者中挑選；因此問題的結構是「從報名者中選擇」，而不是「把員工指派到班次」。第二，車隊的產出高度依賴個別成員的「類型」（倍率），同樣坐滿四個座位，不同組合的產出可以相差甚多。第三，車隊排班是即時、反覆進行的：報名、取消、遞補隨時發生，每一次變動都要立即重新計算。表 2-1 整理了這些差異。

表 2-1　傳統人員排班與車隊排班的比較

面向	傳統人員排班（如護理輪值）	車隊排班
人力性質	受雇員工，有義務上班	志願者，自行報名
決策結構	把員工指派到班次	從報名者中選擇座位人選
產出差異	多半假設同職級人員可互換	產出隨個人倍率顯著不同
計算時機	週期性（每週或每月）排一次	即時，每次報名或取消就重排
主要限制	人數下限、休息時間、勞動法規	座位上限、特殊座位、多帳號
公平性來源	班次負擔的平均分攤	上車機會的分配

2.2　不可分割資源的分配與優先序機制

從機制設計的角度，每一格班次的四個座位是一組不可分割、無法以金錢交易的資源。這類問題的經典模型是「房屋分配問題」（house allocation）。在所有代理人共享同一個優先序、依序挑選的「序列獨裁」（serial dictatorship）機制下，Svensson（1999）證明：同時滿足防策略性（strategy-proofness）、非干擾性（nonbossiness）與中立性的分配機制，恰好就是序列獨裁；Abdulkadiroğlu 與 Sönmez（1998）則分析了以隨機順序進行的序列獨裁的效率與公平性質。

車隊排班的排位程序本質上就是一個以倍率（或報名時間）為優先序的序列獨裁，但有幾個非標準的特徵：存在一個只開放給特定身分（S6）的特殊座位；一位代理人可能需要多個座位單位（雙開、三開）；優先序本身由代理人自行申報的類型決定。最後一點尤其重要：序列獨裁對「要不要報名」是防策略的，但當優先序依據的是代理人自報的倍率時，誇大倍率就能提高優先順位。這是本文第五章與第八章討論的核心誘因問題。

2.3　公平的代價

Bertsimas、Farias 與 Trichakis（2011）把「公平的代價」（price of fairness）定義為：在資源分配問題中，以公平準則取代效率準則時，總效用相對下降的比例。他們證明在相當一般的條件下，這個代價是有界的，且與參與者人數及效用的異質程度有關。本文第五章的命題 4 與第六章的模擬，可以視為這個概念在車隊排班情境下的具體化：「不同人優先」與「先報先上」都是為了公平而犧牲部分效率的規則，我們分別給出它們的最壞情況界與典型情況估計。

2.4　集體行動與同儕生產

Olson（1965）指出，當一個團體的共同利益具有公共財性質時，理性的個人傾向於搭便車，因此大型團體很難自發地組織集體行動，除非有選擇性誘因或強制力。Ostrom（1990）則以大量田野案例說明，社群可以在沒有外部強制的情況下，透過清楚的邊界、在地化的規則、成員參與規則制定、監督與漸進式制裁等設計原則，長期維持共有資源的治理。Benkler（2006）進一步把開放原始碼與維基百科等現象描述為「基於公共資源的同儕生產」，強調模組化與細粒度的任務切割，使大量志願者得以各自貢獻零碎的時間。

車隊排班幾乎是 Benkler 意義下同儕生產的教科書案例：一小時一格的班次正是「細粒度的任務切割」，讓每位推手能以零碎時間參與。同時，車隊的各種規則（報班需先登記、鎖班後不得自行取消、簽到與鴿班紀錄）也對應到 Ostrom 的多項設計原則。本文第八章會回到這個框架。

2.5　遊戲中的玩家勞動

遊戲研究早已注意到玩家在遊戲中投入的協作與勞動。Taylor（2006）對多人線上遊戲的民族誌研究描述了公會如何以排程、分工與規範組織大型團隊活動；Kücklich（2005）以「玩勞動」（playbour）一詞，討論玩家無償的創造性勞動與遊戲產業之間的關係。車隊排班延續了這條研究脈絡，但它的特殊之處在於：協作的目標是一個個人名次，而不是團隊的共同成就；推手付出時間，主要的直接受益者卻是跑者。這種不對稱的互惠結構，是理解車隊規範的關鍵。

2.6　演算法與人的判斷

最後，車隊排班也涉及人與演算法如何分工的問題。Dietvorst、Simmons 與 Massey（2015）的實驗顯示，人們在看到演算法犯錯後，即使演算法整體表現優於人類，也傾向於不再信任它（演算法厭惡）。

菜根機器人的設計保留了「手動」標記：管理員一旦手動調整某一格的座位，自動排位就不再整段重排，只補空位。這種「人可以覆寫、而且覆寫會被尊重」的設計，可以被理解為降低演算法厭惡的一種制度安排。

第 三 章

情境：車隊排班的實務

3.1　協力房間的座位結構

協力 Live 的房間最多容納五人。在車隊的術語裡，這五個位置被編號為 P1 至 P5：P1 固定由跑者（衝名次的玩家）佔據，P2 至 P5 由推手佔據。P2 在規則上具有特殊地位，優先保留給以「S6」身分報名的推手；沒有 S6 時，才由排序第一的一般推手坐上。除此之外，房間外另設一個外援位 B1，以及一份不限長度的候補名單。圖 3-1 示意了一個時段的完整結構。



圖 3-1　一個時段的座位結構。P1 固定為跑者；P2 優先給 S6；P3–P5 為一般推手座位；B1 為外援位，不佔 P2–P5；其餘已確認的報名者依排序進入候補。

推手對房間的貢獻，以社群所稱的「倍率」衡量。倍率是推手登記時自行申報的一個數值，菜根機器人要求它介於 1.18 與 3.88 之間；機器人在班表上顯示的「平均倍率」是 P3 至 P5 三個座位的倍率平均。本文不討論倍率在遊戲內的確切計算方式，只假設一個**單調性**：在其他條件相同時，座位上推手的倍率越高，房間每小時的得分越高。

3.2　一格班次的生命週期

圖 3-2 描述了一格班次從開設到開跑的流程。跑者或管理員先「開班」，宣告某個小時要跑；沒有開班的時段不接受報名。推手隨後「報班」，報名後的狀態是「待確認」，**不佔座位**；管理員確認後（或車隊開啟了自動確認），報名者才進入排位。排位程序把已確認者依規則排進 P2 至 P5，其餘列入候補。之後，任何取消、砍班或新的確認都會觸發同一格的立即重排，候補中排序最前者自動遞補。

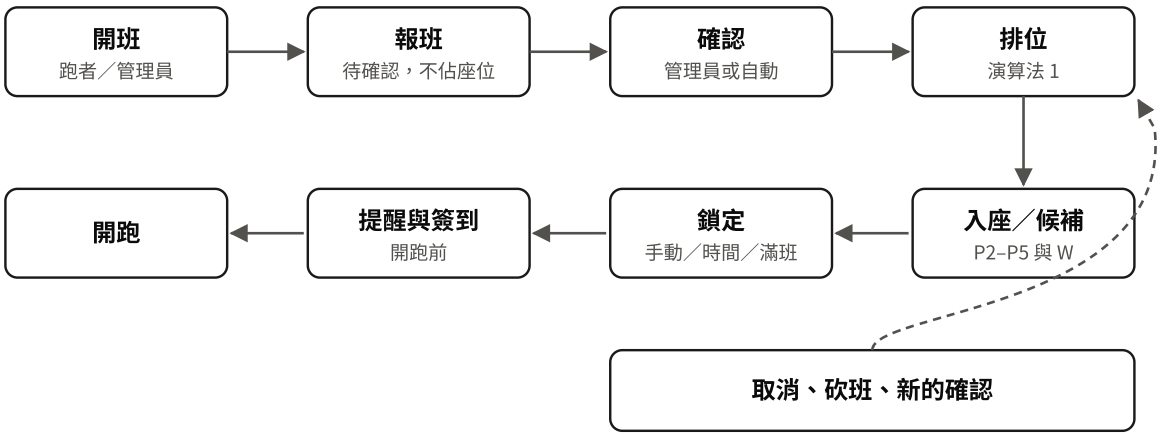


圖 3-2　一格班次的生命週期。實線為主要流程；任何報名、取消或確認都會回到「排位」重新計算。

班次可能被「鎖定」。鎖定的來源有三種：管理員手動鎖班、每日定時的時間鎖班，以及座位全滿時的滿班自動鎖；車隊也可以設定完全不鎖班。管理員另可對已鎖但仍有空位的時段重新開放報名（缺額報班）。鎖定只阻擋新的報名與成員自行取消，**不阻擋排位**：管理員仍可換人，候補仍會遞補。另一個重要的狀態是「手動」：管理員一旦以編輯、換人或拖拉改動某一格的座位，該格就被標記為手動，之後的自動排位只補空位、不整段重排。

3.3　可調整的排位規則

菜根機器人把排位規則中可由車隊自行決定的部分做成設定。表 3-1 列出與本文相關的設定及其預設值。這些設定構成了本文第六章模擬實驗的政策空間。

表 3-1　與排位相關的車隊設定（菜根機器人）

設定	預設值	其他選項與說明
S6 優先於倍率	開	S6 一律排在推手之前，P2 一定給 S6；關閉時只看倍率
排位順序	倍率高者優先	先報先上；綜合力高者優先
倍率比較級距	0.02	倍率先四捨五入到此級距，同級距者比報名先後
雙開／三開怎麼排	不同人優先	一起比；不排多開
推手／S6 最低上車倍率	不限	未達者只進候補尾端
報班自動確認	關	開啟時任何報名立即確認並排位
每時段最多收幾人	不限	含候補的報名人數上限
每人每天／連續上限	不限	報名階段的個人時數限制，所有車合計

3.4　多帳號（多開）

部分推手會同時操作兩個或三個帳號，在同一個房間裡佔兩個或三個座位，稱為雙開與三開。每個帳號可以登記各自的倍率（第二開、第三開的倍率未登記時沿用第一開）。多開提高了單一成員的貢獻，但也

帶來分配上的問題：當座位不足時，應該讓同一個人的第二個帳號上車，還是讓另一個人的第一個帳號上車？「不同人優先」政策的答案是後者：先讓每個人的第一開入座，還有空位才補第二、三開。這個政策反映了社群「多讓一個人參與」的價值，但如第五章所示，它有其效率代價，也在實作中產生了一個邊界情況。

3.5　車隊佔位與外援

最後，實務中還有兩種特殊情形。一是「車隊佔位」：管理員可以先用一個名為「車隊」的佔位符號保留座位，等之後再決定給誰；佔位在自動排位時會被保留，不會被一般報名者擠掉。二是外援：以外援身分報名者坐 B1 位，不參與 P2 至 P5 的競爭。這兩種情形在形式模型中可以簡單地視為「預先扣除的容量」，本文的分析不再特別處理。

第 四 章

形式模型

4.1　基本記號

考慮一格班次 h。令 N 為該格**已確認**的報名者集合（待確認者不參與排位）。每位報名者 $i \in N$ 具有以下屬性，整理於表 4-1。

表 4-1　記號

記號	意義
N	已確認的報名者集合，$\lvert N\rvert = n$
$m_i \in \{1, 2, 3\}$	報名者 i 的開數（單開、雙開、三開）
$b_{i1} \geq b_{i2} \geq b_{i3}$	報名者 i 第 1、2、3 開的倍率，$b \in [b_{\min}, b_{\max}] = [1.18, 3.88]$
$r_i \in \{\text{推手}, \text{S6}\}$	報名身分
s_i	S6 倍率（僅 $r_i = \text{S6}$ 時有意義）
t_i	報名時間（用於同分時的先後）
(i, j)	「座位單位」：報名者 i 的第 j 開，倍率 b_{ij}
$K = 3$	一般推手座位數（P3–P5）
δ	倍率比較級距（預設 0.02）
$\succ$	優先序（排位順序）

我們假設 $b_{i1} \geq b_{i2} \geq b_{i3}$，也就是同一位推手的第二、三個帳號不比第一個帳號強。這與實務相符（推手通常把最強的隊伍放在主帳號），也是第五章若干命題的前提。

4.2　分配與可行性

定義 1（分配）。一格班次的分配是一個三元組 $A = (p, S, W)$，其中 p 是坐上 P2 的座位單位（或空），S 是坐上 P3–P5 的座位單位集合，W 是候補名單（有序）。分配是**可行**的，若且唯若：(a) $\lvert S\rvert \leq K$；(b) 每個座位單位至多出現一次；(c) 若報名者 i 的第 j 開在 S 中且 $j > 1$，則其第 $j-1$ 開在 $\{p\} \cup S$ 中（不能跳過主帳號只上副帳號）；(d) 若 p 是某位 S6 報名者的單位，該報名者的其他單位不在 S 中。

定義 2（不浪費）。可行分配 A 是**不浪費**的，若不存在一個未被分配的座位單位，可以在不違反可行性的前提下加入空著的座位。

4.3　目標

排位同時追求多個目標，而且它們彼此衝突：

- **效率：**座位上的倍率越高越好。最簡單的代理指標是座位倍率總和 $E(A) = b(p) + \Sigma_{(i,j)\in S}\, b_{ij}$，或平均倍率 $E(A) \div (|S| + 1)$。
- **參與廣度：**上車的不同人數 $D(A) = |\{i : i \text{ 有單位在 } \{p\} \cup S \text{ 中}\}|$。
- **程序公平：**相同條件的人應得到相同的對待；條件接近時，先報名者應有優勢（對應級距與時間的比較規則）。
- **可預測性：**報名者能事先理解自己會不會上車；結果不應取決於報名與取消的歷史順序。

實務規則可以被理解為對這些目標的**字典序**（lexicographic）權衡：S6 優先（角色需求）＞ 優先序（效率或程序公平）＞ 多開政策（參與廣度）＞ 報名時間（同分處理）。第五章把這個權衡寫成演算法，並分析它的性質。

4.4　優先序

定義 3（倍率優先序）。給定級距 $\delta > 0$，定義捨入倍率 $\langle b \rangle_\delta = \delta \cdot \mathrm{round}(b \div \delta)$。倍率優先序 $\succ_\delta$ 定義為：$i \succ_\delta k$ 若且唯若 $\langle b_{i1} \rangle_\delta > \langle b_{k1} \rangle_\delta$，或兩者相等且 $t_i < t_k$。$\delta = 0$ 時即為純粹的倍率排序。

定義 4（先報先上優先序）。$i \succ_{\mathrm{F}} k$ 若且唯若 $t_i < t_k$。

假設報名時間互不相同，兩種優先序都是 N 上的全序。

4.5　跨時段的問題

上述模型只描述一格班次。完整的班表是許多格的集合 H，同一位成員可以報名多格。若各格之間沒有任何耦合（例如個人時數上限、連續上班限制），則整張班表的問題可以分解為 $|H|$ 個獨立的單格問題。菜根機器人的實作正是如此：每一格獨立排位。第七章將討論加入跨時段限制後的問題結構。

第 五 章

排位機制與其性質

5.1　演算法

演算法 1 是菜根機器人排位程序（版本 b2026-11-09r 的 `_auto_assign_raw`）的形式化。為了聚焦，我們省略了車隊佔位、同車第二跑者、最低上車倍率與手動標記等處理；它們或者是預先扣除容量，或者只改變候補的尾端順序，不影響本章的結論。

演算法 1　單格排位（現行程序）

輸入：已確認報名者 N、優先序 $\succ$、多開政策 $\pi \in \{\text{不同人優先}, \text{一起比}, \text{不排多開}\}$

$\sigma \leftarrow$ 依 $\succ$ 排序 N
$\Sigma \leftarrow \{i \in \sigma : r_i = \text{S6}\}$；$\Pi \leftarrow \sigma \setminus \Sigma$　　▷ S6 優先於倍率
若 $|\Sigma| > 1$：依 S6 倍率 s_i（同樣的級距與時間規則）排序 Σ，
　　保留第一名，其餘改為推手併入 Π，Π 依 $\succ$ 重排
若 $\Sigma \neq \varnothing$：$p \leftarrow (\Sigma$ 第一名, S6$)$；$i^* \leftarrow$ 無
否則：$i^* \leftarrow \Pi$ 第一名；$p \leftarrow (i^*, 1)$
First $\leftarrow [\,]$；Extra $\leftarrow [\,]$
對 Π 中每位 i（依序）：
　　$U \leftarrow [(i,1), \dots, (i,m_i)]$（$\pi$ = 不排多開時只取 $(i,1)$）
　　若 $i = i^*$：$U \leftarrow U$ 去掉 $(i^*,1)$
　　若 U 非空：First 加入 U 的第一個；Extra 加入其餘
批次 $\leftarrow$ [First, Extra]（π = 一起比 時：[依單位倍率排序的 First $\cup$ Extra]）
依批次順序把單位填入 P3、P4、P5；其餘依序列入候補 W
回傳 (p, S, W)

演算法 1 的時間複雜度為 $O(n \log n)$，由排序主導。由於每格的報名者通常不超過數十人，計算成本可以忽略，這也是它能在每一次報名或取消時即時重算的前提。

5.2　一致性與單調性

> **命題 1（歷史無關性）。**對任何未被標記為手動的時段，在任意一串報名、取消、確認與砍班操作之後，該時段的分配等於演算法 1 作用在當下已確認集合 N 上的結果。特別地，候補的遞補順序等於優先序，而與進入候補的先後無關。

證明。系統在每一次改變 N 的操作之後，都以演算法 1 對該時段從頭重算，而演算法 1 是 N（含每位報名者的屬性與報名時間）與車隊設定的確定性函數，不依賴先前的分配。因此最終分配只取決於最終的 N。遞補是重算的特例：退出者離開 N 後重算，原候補中優先序最高者自然進入座位。　□

歷史無關性看似平凡，卻是可預測性的基礎：報名者只要知道自己在優先序中的位置與座位數，就能判斷自己會不會上車，而不必擔心「別人先取消再重報」之類的操作會改變結果。它也意味著「候補」並不是傳統意義上的排隊：晚進入候補但倍率較高的人，會在遞補時排在前面。這一點常讓初次接觸的成員感到意外，手冊因此特別說明「遞補依排序而非排隊先後」。

> **命題 2（族群單調性）。**假設沒有 S6 報名者。若把一位新報名者 k 加入 N，則任何其他報名者 $i \neq k$ 坐上座位的單位數不會增加。

證明。沒有 S6 時，P2 由優先序第一的推手的第 1 開佔據，P3–P5 依批次順序填入。加入 k 後，k 的單位被插入批次序列中依優先序決定的位置；若 k 成為新的第一名，原第一名 $i^{\star}$ 讓出 P2，其第 1 開回到 First。對任何 $i \in \{k, i^{\star}\}$，i 的單位在 First 與 Extra 中的相對位置只會被 k 的單位往後推，因此在容量固定為 3 的前提下，坐上座位的單位數不增。對 $i^{\star}$，加入 k 前他佔有 P2 外加至多 2 個後續單位，加入後他的單位全部回到 P3–P5 的競爭中，且排在 k 的單位之後，總數同樣不增。 □

有 S6 時，命題 2 可能失效：新的 S6 報名者若在 S6 倍率上勝過原本的 S6，原 S6 會被降為推手；而依可行性條件 (d)，S6 不能以其他帳號再佔 P3–P5，降為推手後反而可以多開入座，座位單位數因此增加。在第六章的模擬中，這種情形在「不同人優先」政策下出現於 0.04% 的情境、在「一起比」政策下出現於 0.17% 的情境。它不算缺陷，而是「S6 是一種角色而非等級」這個設計的自然結果。

5.3　倍率級距的效率代價

倍率級距的用意，是讓倍率「差不多」的人改比報名先後，以獎勵早報名、也避免為了 0.01 的差距爭執。它的代價是可能讓倍率略低者先上車。下面的命題說明這個代價有一個簡單的上界。

> **命題 3（級距損失上界）。**考慮「單一序列選擇」的情形：每位報名者只有一個單位（不排多開），或政策為「一起比」，且沒有 S6。令 A_{δ} 與 A_{0} 分別為以 $\succ_{\delta}$ 與 $\succ_{0}$ 排位的結果，坐上的單位數為 $C \le K + 1 = 4$。則
>
> $$E(A_{0}) - E(A_{\delta}) \le C \cdot \delta \tag{5.1}$$
>
> 亦即平均每席的倍率損失不超過 δ。

證明。在單一序列選擇中，兩種優先序都選出序列中前 C 個單位。令 $x_{(1)} \ge x_{(2)} \ge \cdots$ 為所有單位倍率由大到小的排列，u_{ℓ} 為 $\succ_{\delta}$ 序列中第 ℓ 位的單位。我們證明 $b(u_{\ell}) \ge x_{(\ell)} - \delta$。假設不然，$b(u_{\ell}) < x_{(\ell)} - \delta$。由於捨入誤差 $|\langle b \rangle_{\delta} - b| \le \delta/2$，

$$\langle b(u_{\ell}) \rangle_{\delta} \le b(u_{\ell}) + \delta/2 < x_{(\ell)} - \delta/2 \le \langle x_{(\ell)} \rangle_{\delta}$$

而捨入是單調的，所以倍率前 ℓ 名的每一個單位，捨入值都嚴格大於 u_{ℓ} 的捨入值，在 $\succ_{\delta}$ 中都排在 u_{ℓ} 之前。這表示 u_{ℓ} 之前至少有 ℓ 個單位，與它位居第 ℓ 位矛盾。對 $\ell = 1, \dots, C$ 加總，$E(A_{\delta}) \ge \Sigma_{\ell}\, x_{(\ell)} - C\delta = E(A_{0}) - C\delta$。 □

以預設的 $\delta = 0.02$ 而言，命題 3 保證平均倍率的損失不超過 0.02，相對於約 2.7 的典型倍率不到 0.8%。模擬中（第六章），單一序列情形的實際損失遠小於上界：每格倍率總和的平均損失為 0.0001、最大為 0.0135，而上界是 0.08。

5.4　形式分析揭露的邊界情況

命題 3 只對單一序列成立。對預設的「不同人優先」兩階段政策，我們原本預期類似的上界也成立，模擬卻顯示：在現行程序下，$\delta = 0.02$ 時單格倍率總和的最大損失達 0.262，遠超過 $4\delta = 0.08$。追查反例，發現問題出在演算法 1 的第 8 至 9 行。

當 P2 由一般推手 i^* 佔據（沒有 S6）時，第 8 行把 i^* 的第 1 開移除，於是第 9 行把他的**第 2 開**當作「他的第一個單位」放進 First。又因為 i^* 是優先序第一名，這個第 2 開會排在 First 的最前面，在第一階段就入座，排在其他人的第 1 開之前。這與「先讓每個人的第 1 開入座，還有空位才補第 2、3 開」的政策意圖相矛盾：i^* 的第 1 開已經坐在 P2，他的第 2 開理應在第二階段才補位。

反例

設 $\delta = 0.02$，報名者如下（皆為推手）：A 倍率 2.849，單開，較晚報名；B 第 1 開 2.841、第 2 開 2.46，較早報名；C 2.741；D 2.719，皆單開。

以 $\delta = 0$ 排位：A 第一，坐 P2；First = [B_1, C, D]，P3–P5 = B_1、C、D。倍率總和 2.849 + 2.841 + 2.741 + 2.719 = 11.150。

以 $\delta = 0.02$ 排位：A、B 的捨入值都是 2.84，B 較早報名而成為第一，坐 P2；依第 8–9 行，First = [B_2, A, C, D]，P3–P5 = B_2、A、C，D 落入候補。倍率總和 2.841 + 2.46 + 2.849 + 2.741 = 10.891，損失 0.259；而且 B 一人佔了兩席，D 的第 1 開卻沒有座位。若把 B 的第 2 開移到第二階段（下文的一致版），P3–P5 = A、C、D，總和回到 11.150，沒有任何損失。

這個反例同時說明了兩件事。第一，級距本身並沒有錯，它只是讓 A、B 的先後互換；真正造成損失的是互換之後觸發的「P2 推手第二開插隊」。第二，即使不考慮級距，只要 P2 由雙開推手佔據，同樣的插隊就會發生。

我們在模擬中把第 8–9 行改為「若 $i = i^*$，其剩餘單位全部放入 Extra」（附錄 B），稱為**一致版**兩階段政策。在一致版下，$\delta = 0.02$、0.05、0.1 時單格倍率總和的最大損失分別為 0.0135、0.045、0.121，都在 4δ 的範圍內，與命題 3 的預期一致。現行程序與一致版的結果在報名人數期望值為 4、6、8 時，分別有 5.5%、3.4%、1.7% 的時段不同；一致版平均每格多讓 0.013 至 0.019 位不同的人上車，倍率總和則平均少 0.004 至 0.007。

需要說明的是，第 10 行的批次在程式中經由一個可設定的函數產生，其原始碼不在本文分析的範圍內；本節的結論假設該函數的預設行為如程式註解所述，即依建構順序先排 First、再排 Extra。若該函數另行依倍率重排 First，插隊的程度會降低，但 i^* 的第 2 開仍會在第一階段與他人的第 1 開競爭，政策意圖的矛盾依然存在。

值得玩味的是，這個「缺陷」在效率上並非全無好處：P2 推手通常是倍率最高的人，他的第 2 開往往也比其他人的第 1 開強，因此插隊平均而言略為提高了倍率總和。現行程序因此可以被理解為一個隱含的折衷：在 P2 這一個人身上偏向效率，在其他人身上偏向參與廣度。問題不在於哪一種選擇才對，而在於政策的文字說明與實際行為不一致；排班規則的正當性，很大一部分來自成員能夠理解並預期它。

5.5 「不同人優先」的效率代價

命題 4（不同人優先的最壞效率比）。考慮 P3–P5 的分配，假設沒有 S6、P2 持有者沒有剩餘單位參與競爭，且每位報名者滿足 $b_{i1} \geq b_{i2} \geq b_{i3}$。令 E_{D} 與 E_{J} 分別為「不同人優先」（一致版）與「一起比」（以 $\delta = 0$）在 P3–P5 的倍率總和。則

$$E_{\mathrm{D}} \div E_{\mathrm{J}} \geq \left(b_{\max} + 2b_{\min}\right) \div \left(3b_{\max}\right) \approx 0.536 \tag{5.2}$$

且此界是緊的。

證明。兩種政策都不浪費，因此坐上的單位數相同，記為 $c \leq 3$。令 M 為所有候選單位中的最大倍率。由 $b_{i1} \geq b_{ij}$，M 必為某人的第 1 開，且該人在優先序中居首，所以兩種政策都讓它入座。「不同人優先」的其餘 $c-1$ 個單位倍率各至少 $b_{\min}$，故 $E_{\mathrm{D}} \geq M + (c-1)b_{\min}$；「一起比」的每個單位至多 M，故 $E_{\mathrm{J}} \leq cM$。比值 $(M + (c-1)b_{\min}) \div (cM)$ 對 M 與 c 都是遞減的，在 $M = b_{\max}$、$c = 3$ 時取最小值。緊性：一位三開、三個帳號倍率皆為 $b_{\max}$ 的推手，加上兩位倍率為 $b_{\min}$ 的單開推手，即達到此界。 □

以台服的倍率範圍代入，最壞情況下「不同人優先」只能得到「一起比」的 53.6%。但最壞情況需要極端的倍率差距，在實務中幾乎不會出現。模擬中（報名人數期望值 4），兩種政策的 P3–P5 倍率總和比值平均為 0.993，最小為 0.756；有 23.6% 的時段兩者結果不同；就所有時段平均而言，「不同人優先」讓 P3–P5 的不同人數從 2.27 增加到 2.51。換言之，社群為了「多讓一個人參與」，在典型情況下只付出了不到 1% 的效率。

若放寬「P2 持有者沒有剩餘單位」的假設，最壞比值會更低：例如 P2 由一位三開、三個帳號皆為 $b_{\max}$ 的推手佔據，另有三位倍率 $b_{\min}$ 的單開推手，一致版會讓三位單開者入座（$3b_{\min}$），「一起比」則讓兩個 $b_{\max}$ 帳號與一位單開者入座，比值為 $3b_{\min} \div (2b_{\max} + b_{\min}) \approx 0.396$。有趣的是，在這個例子裡，現行程序的「插隊」會讓 P2 持有者的第 2 開先入座，比值因此提高為 $(b_{\max} + 2b_{\min}) \div (2b_{\max} + b_{\min}) \approx 0.698$，這再次印證了 5.4 節所說的隱含折衷。

5.6　誘因

> **命題 5（誘因性質）。**(a) 在任何優先序下，對想要上車的成員而言，報名弱支配於不報名。(b) 在倍率優先序 $\succ_{\delta}$ 下，申報較高的倍率弱改善自己的優先順位，因此演算法 1 對倍率的申報**不是**防策略的。(c) 在先報先上優先序 $\succ_{\mathrm{F}}$ 下，申報的倍率不影響優先順位（不計最低上車倍率與 S6 的比較），因此對倍率申報是防策略的，但會誘發提早報名的時間競爭。

證明。(a) 不報名的結果是不上車；報名的結果是上車或候補，後者不劣於不上車。(b) 由定義 3，$\langle b \rangle_{\delta}$ 對 b 單調不減，提高申報值只會讓自己在 $\succ_{\delta}$ 中的位置不降。(c) 由定義 4，$\succ_{\mathrm{F}}$ 只依 t_i 排序；而 t_i 越小越有利，所以每位成員都有提早報名的誘因。 □

命題 5 指出了倍率優先制的一個根本弱點：它依賴成員誠實申報倍率。在實務中，倍率由成員自行登記，管理員可以修改；誠實申報因此主要靠管理員的審核與社群的相互監督來維持，而不是靠機制本身。這正是 Ostrom 所說「監督」與「漸進式制裁」在數位社群中的對應物：一位被發現誇大倍率的成員，失去的不只是座位，還有聲譽。第八章會進一步討論。

第 六 章

模擬評估

6.1　實驗設計

由於各車隊的實際班表包含成員的個人資料，且並未公開，本章以參數化的合成資料進行蒙地卡羅模擬。模擬的目的不是重現某個特定車隊，而是在一組透明、可調整的假設下，比較不同排位政策的系統性差異。表 6-1 列出主要參數，完整設定見附錄 A。

表 6-1　模擬的主要參數

參數	設定
成員池	40 人，每次模擬固定
第 1 開倍率	常態分布 $N(2.7, 0.45^2)$，截斷於 [1.18, 3.88]
多開	20% 雙開、5% 三開；第 2、3 開倍率 = 第 1 開 − U(0, 0.4)，再截斷
S6	15% 的成員可擔任 S6，每次報名有一半機率以 S6 身分報名；S6 倍率 = 第 1 開 + U(−0.2, 0.3)
每格報名人數	卜瓦松分布，期望值 $\lambda \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$，自成員池中不重複抽取
報名時間	均勻分布，用於同分處理與先報先上
樣本數	每組設定 20,000 格（公平性實驗 30,000 格、效率比實驗 50,000 格）

比較的政策有四種：(1) 倍率優先、級距 0.02、不同人優先（預設，以現行程序實作）；(2) 倍率優先、一起比；(3) 倍率優先、不排多開；(4) 先報先上、不同人優先。評估指標包括：**座位倍率總和**（P2–P5，作為效率代理）、**平均倍率**、**不同人數**（P2–P5 上的不同成員數）、**P3–P5 填滿率**與**候補人數**。

6.2　競爭程度與效率

圖 6-1 顯示三種主要政策的平均座位倍率如何隨每格報名人數期望值 λ 變化。λ 小時（報名人數少於座位數），所有人都能上車，政策幾乎沒有差別；λ 越大，倍率優先的兩種政策平均倍率越高，因為它們能從更多報名者中挑出強者；先報先上則幾乎不隨 λ 改變，始終停留在成員池的平均水準附近（約 2.73）。

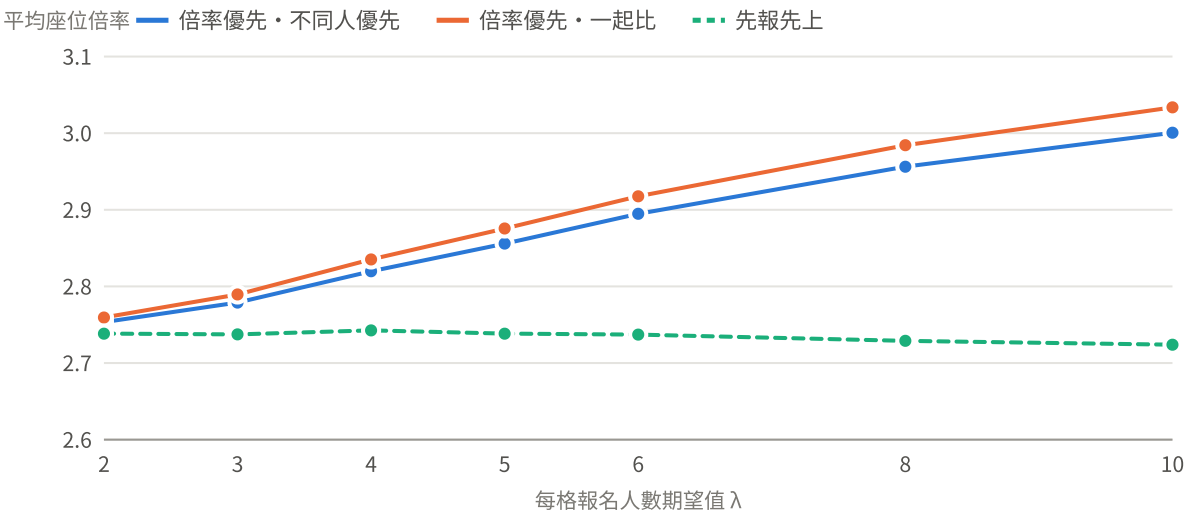


圖 6-1　平均座位倍率（P2–P5）與每格報名人數期望值 λ 的關係。每點為 20,000 格的平均。

表 6-2 以 λ = 6 為例列出所有指標。倍率優先（不同人優先）的倍率總和為 11.14，一起比再高 0.8%，不排多開低 2.7%，先報先上則低 5.7%。不排多開的填滿率最低（92.3%），因為它放棄了多開帳號能補上的座位；但它的候補也最短，因為每位報名者只佔一個候選位置。

表 6-2　λ = 6 時四種政策的比較

政策	倍率總和	平均倍率	不同人數	P3–P5 填滿率	候補人數
倍率優先・不同人優先	11.14	2.895	3.62	94.8%	3.73
倍率優先・一起比	11.24	2.918	3.38	94.8%	3.73
倍率優先・不排多開	10.85	2.874	3.76	92.3%	2.23
先報先上・不同人優先	10.51	2.737	3.66	94.8%	3.71

6.3　參與廣度

圖 6-2 顯示 P2–P5 上不同人數的變化。「一起比」的不同人數最少，且在 λ ≥ 6 後幾乎不再增加（約 3.4–3.5），因為高倍率的多開推手會以多個帳號佔據座位；「不同人優先」與「先報先上」則隨 λ 趨近 4（每個座位一人）。效率與參與廣度的取捨在這裡清楚可見：λ = 10 時，「一起比」比「不同人優先」的倍率總和高 1.1%，但每格少讓 0.36 位成員上車。

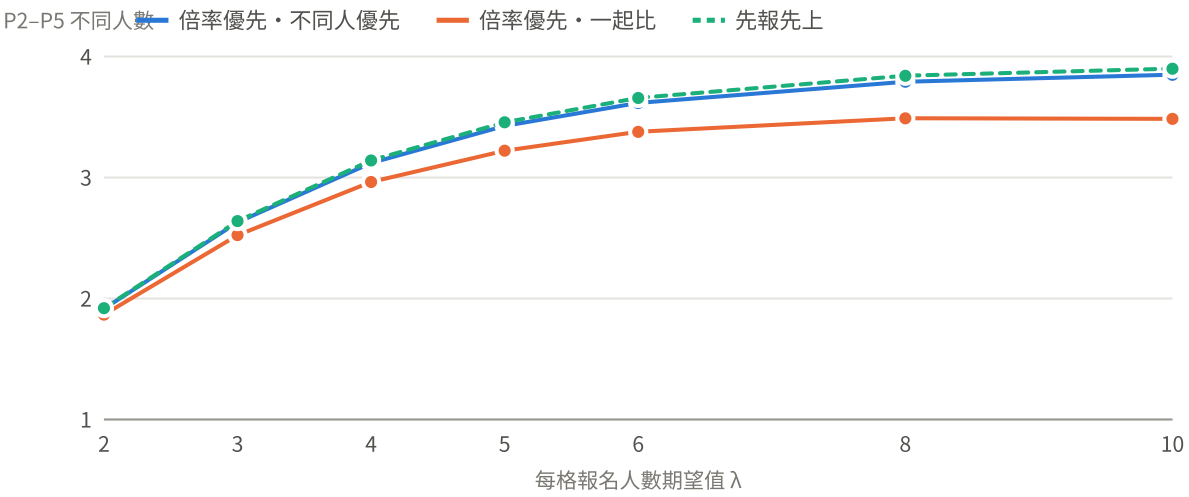


圖 6-2　P2–P5 上不同成員數與 λ 的關係。最大值為 4。

6.4　公平的代價

沿用 Bertsimas 等人（2011）的定義，我們把先報先上相對於倍率優先的效率損失比例，$(E_{\text{倍率}} - E_{\text{先報}}) \div E_{\text{倍率}}$，稱為「程序公平的代價」。圖 6-3 顯示這個代價隨競爭程度單調上升：λ = 2 時只有 0.9%，λ = 6 時 5.7%，λ = 10 時 9.2%。直觀地說，報名者越多，按先後選人與按倍率選人的差距就越大。

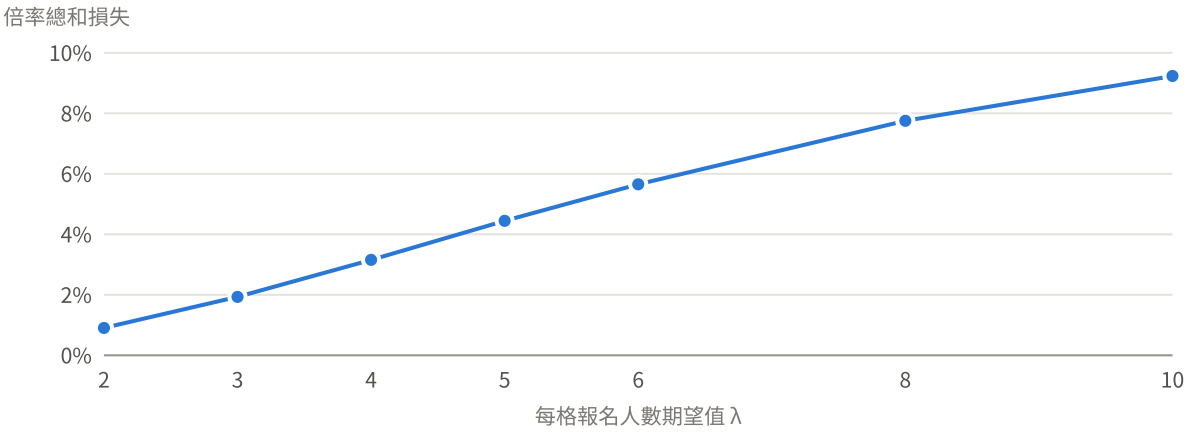


圖 6-3　程序公平的代價：先報先上相對於倍率優先的座位倍率總和損失比例。

反過來看「不排多開」：它相對於預設政策的效率損失在 λ = 2 時高達 13.6%（因為座位常常空著），λ = 10 時降到 0.7%。也就是說，禁止多開在人手不足時代價很大、在人手充裕時幾乎沒有代價。這給了車隊一個簡單的經驗法則：人少的時段應該允許多開，人多的時段則可以考慮限制，以讓更多人參與。

6.5　上車機會的分配

效率之外，另一個問題是：誰上得了車？我們追蹤 30,000 格中每位成員的報名次數與上車次數，計算各自的上車率，再依倍率把 40 位成員分為五個五分位。圖 6-4 與表 6-3 是結果。

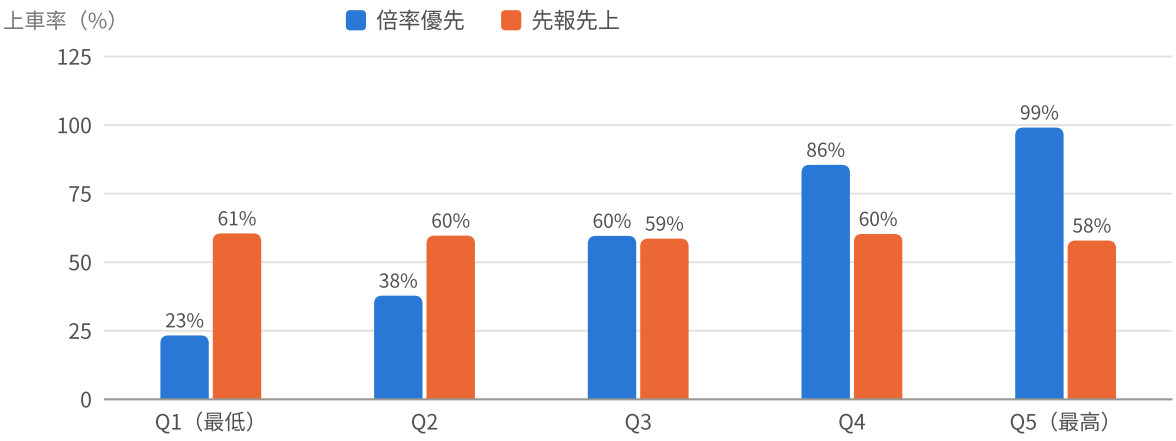


圖 6-4 λ = 6 時各倍率五分位的上車率（上車次數 ÷ 報名次數）。第 1 五分位為倍率最低的 20% 成員。

在倍率優先下，上車率幾乎完全由倍率決定：λ = 6 時，倍率最低的五分位上車率只有 23%，最高的五分位則達 99%；成員上車次數的吉尼係數為 0.278。λ = 8 時差距更大，最低五分位只剩 11%，吉尼係數 0.41。先報先上的上車率則在各五分位之間幾乎相同（λ = 6 時 58%–61%），吉尼係數只有 0.031。

表 6-3 各政策下的上車率分布

政策	λ	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	吉尼係數
倍率優先	4	50.5%	65.9%	81.9%	95.0%	99.8%	0.138
倍率優先	6	23.3%	37.8%	59.6%	85.5%	99.1%	0.278
倍率優先	8	10.6%	19.9%	37.3%	72.9%	97.7%	0.410
先報先上	4	77.8%	77.2%	76.1%	77.3%	76.4%	0.018
先報先上	6	60.5%	59.7%	58.6%	60.3%	57.9%	0.031
先報先上	8	48.0%	47.5%	44.4%	47.3%	44.6%	0.046

這組數字揭示了倍率優先制的社會後果：當報名者多於座位時，倍率較低的成員會長期處於候補，報名的回報很低。若這些成員因此不再報名，人手在人少的時段反而更加不足。換言之，倍率優先在單格層面是有效率的，但在長期與群體層面，它可能侵蝕志願參與的基礎。這是第八章討論的核心張力。

6.6　級距的影響

表 6-4 比較不同級距寬度 δ 的影響。在現行程序下，δ = 0.02 時每格倍率總和的平均損失只有 0.0001，δ = 0.2 時也只有 0.013；但最大損失受 5.4 節的邊界情況影響，可達 0.26 至 0.57。在一致版下，最大損失都落在命題 3 的上界之內。

表 6-4 倍率級距寬度 δ 的影響（λ = 6）

δ	平均損失（現行）	最大損失（現行）	最大損失（一致版、無 S6）	上界 4δ	入座者的報名先後名次
0	0	0	0	0	0.499
0.02	0.0001	0.262	0.014	0.08	0.499
0.05	0.0008	0.307	0.045	0.20	0.496
0.1	0.0038	0.569	0.121	0.40	0.491
0.2	0.0126	0.569	—	0.80	0.481

最右欄衡量級距「獎勵早報名」的程度：它是入座者在該格報名者中的報名先後名次（0 為最早、1 為最晚）的平均；0.5 代表報名先後與入座無關。δ = 0.02 時這個值是 0.499，幾乎沒有獎勵早報名的效果；即使 δ = 0.2，也只降到 0.481。換言之，以目前的倍率分布而言，0.02 的級距主要是在處理「倍率幾乎相同」的極少數情況，並不會明顯改變誰上車。若車隊希望真正鼓勵提早報名，需要更寬的級距，或改用先報先上。

6.7　模擬的限制

本章的結論依賴合成資料的假設。倍率分布、多開比例與報名人數分布都可能與實際車隊不同；成員的報名行為也被假設為與政策無關，而實際上成員可能會因為政策而改變是否報名、何時報名。後者尤其重要：6.5 節指出的「低倍率成員的報名回報很低」，若導致這些成員退出，模擬中的 λ 本身就會隨政策改變。把報名行為內生化（例如以重複賽局或代理人基模型模擬成員的進出），是後續研究的自然方向。

第 七 章

時間維度：班次的價值與跨時段最佳化

7.1　每一小時都一樣嗎

前兩章把每一格班次當作彼此獨立、價值相同的單位。但對跑者而言，不同時段的一小時並不等價。跑者自己每小時能拿到的分數，主要取決於房間的組成，與時段無關；然而名次是相對的，它取決於跑者與競爭者之間的分差如何變化。在競爭者增分緩慢的時段，同樣一小時的遊玩能拉開更多的相對距離。

我們以台服第 175 至 184 期活動的高頻榜線快照，估計一天之中各小時的相對增分速率 $\rho(h)$：把所有相鄰快照之間的增分依台灣時間的小時歸類，再除以該期的平均速率（1 代表該期平均）。以 T100 為競爭者的代表，定義班次的**相對排名收益指數**：

$$G(h) = 1 \div \bar{\rho}_{\mathrm{T100}}(h) \tag{7.1}$$

$G(h) = 2$ 的意思是：在該小時，跑者以同樣的速度遊玩，相對於 T100 附近競爭者拉開的距離，是平均時段的兩倍。圖 7-1 是結果。

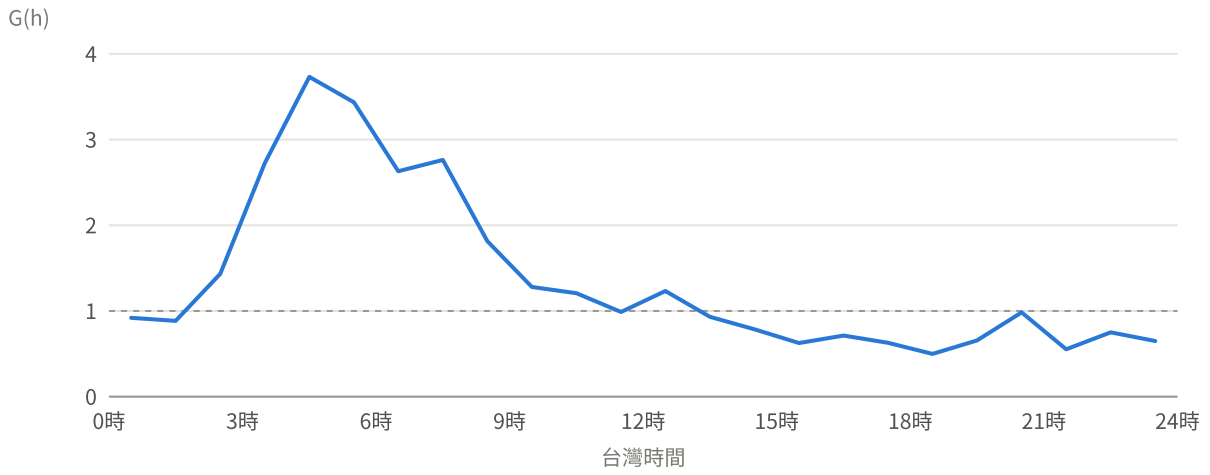


圖 7-1　各小時的相對排名收益指數 $G(h) = 1 \div \bar{\rho}_{\mathrm{T100}}(h)$（台灣時間），第 175–184 期共 10 期活動。虛線為 1（平均時段）。

凌晨 3 至 7 時的 G 介於 2.6 與 3.7 之間，4 時最高（3.73）；傍晚 18 時最低（0.50）。換言之，凌晨 4 時的一小時，相對於競爭者的「價值」約為傍晚 18 時的 7.5 倍。這為車隊安排夜間班次（「夜車」）提供了量化的理由：深夜的班次之所以重要，不是因為那時候分數比較好拿，而是因為那時候競爭者大多停下來了。

需要注意兩點。第一，ρ 混合了活動開跑（多在 15 時）與結算（多在 21 時）前後的衝刺效應，傍晚的低 G 有一部分來自結算前的競爭加劇，而不純粹是作息。第二，G 衡量的是相對於 T100 附近競爭者的收益；對衝更前段名次的跑者，應該使用更高段位的速率剖面，而頂端玩家本身也會以車隊輪班的方式在深夜持續遊玩，因此真正的競爭對手在深夜未必停下。

7.2　稀缺與價值的錯位

夜間班次的價值最高，但它也最難排滿：大多數推手在凌晨需要睡眠。雖然本文沒有實際的報名資料可以直接驗證，但本章的速率剖面（以及本研究組先前對台服活動動態的分析）都顯示，凌晨的整體增分速率只有平均的三分之一左右，推手的可用人數在同一時段很可能也處於低谷。於是車隊面對一個典型的「價值與供給錯位」：最需要人的時段，恰好是最沒有人的時段。

第六章的模擬為此提供了一個政策上的啟示。人手不足時（λ 小），「不排多開」的效率損失極大（$\lambda = 2$ 時 13.6%），而倍率優先與先報先上的差別極小（0.9%）。因此在夜間班次，車隊應該盡量允許多開、放寬上車門檻；在人手充裕的晚間班次，才有餘裕追求倍率或參與廣度。目前的車隊設定是全車隊統一的，不隨時段變化；允許依時段套用不同的排位政策，是一個值得考慮的設計方向。

7.3　跨時段的排班問題

現行程序逐格獨立排位。下面的命題說明，在什麼條件下這樣做是最佳的，以及在加入跨時段限制之後問題的結構。

> **命題 6（分解與可解性）。**考慮單開、沒有 S6 的情形，目標為加權倍率總和 $\Sigma_h\, w_h \Sigma_i\, b_i\, x_{ih}$，其中 $x_{ih} \in \{0,1\}$ 表示成員 i 是否坐上第 h 格，$w_h > 0$ 為該格的權重，$a_{ih} \in \{0,1\}$ 表示是否報名，每格座位數為 $K' = 4$。
>
> (a) 若沒有跨時段限制，則逐格選出倍率前 K' 名（即演算法 1 以 $\delta = 0$ 排位）為全域最佳解。
>
> (b) 若加入個人時數上限 $\Sigma_h\, x_{ih} \le H_i$，問題等價於一個二部圖上的最大權 b-匹配，可化為最小成本流問題，以多項式時間求得整數最佳解；但逐格貪婪一般不再是最佳的。
>
> (c) 若再加入連續上班時數上限或最短休息時間等限制，問題屬於一般的人員輪值問題，一般而言是 NP 困難的。

證明。(a) 沒有跨時段限制時，目標與限制都可依 h 分解，各格的子問題是「在 $a_{ih} = 1$ 的成員中選至多 K' 人使 $\Sigma\, b_i$ 最大」，其最佳解即倍率前 K' 名；權重 $w_h > 0$ 不改變各格的最佳選擇。(b) 建構網路：源點 $\to$ 成員 i（容量 H_i，成本 0）；成員 $i \to$ 時段 h（僅當 $a_{ih} = 1$，容量 1，成本 $-w_h b_i$）；時段 $h \to$ 匯點（容量 K'，成本 0）。可行流與可行班表一一對應，最小成本流即最大加權倍率；由於網路流問題的限制矩陣全幺模（totally unimodular），存在整數最佳解，且可以多項式時間求得（Ahuja et al., 1993）。逐格貪婪不再最佳的反例：成員 A 倍率最高、$H_{\mathrm{A}} = 1$，報名了權重高的夜間格 h_1 與權重低的晚間格 h_2；若晚間格先被處理，A 被排進 h_2 而耗盡時數，夜間格只能由倍率較低者遞補，總目標低於把 A 排在 h_1 的解。(c) 連續上班與休息限制使各成員的可行班型形成組合結構，一般形式包含已知為 NP 困難的人員輪值問題（Burke et al., 2004）。 □

菜根機器人目前以「每人每天／連續上限」設定處理個人時數：它在**報名階段**擋下超過上限的報名，而不是在排位階段最佳化。這等於以「先報名者先佔用時數」的方式解決命題 6(b) 的耦合，實作簡單、結果容易理解，但如反例所示，可能把高倍率成員的有限時數用在價值較低的時段。若要進一步提升，可以在每日鎖班前，以命題 6(b) 的最小成本流對次日班表做一次全域重排，並以 $w_h = G(h)$ 或由榜線預測模型估計的時段價值作為權重。這樣的全域重排會犧牲一部分歷史無關性與即時性（成員報名後的結果要到重排時才確定），是否值得，取決於車隊對效率與可預測性的取捨。

7.4　小結

班次的價值隨時段劇烈變化：以相對於 T100 的排名收益衡量，凌晨 4 時約為傍晚 18 時的 7.5 倍。價值最高的夜間班次同時也是人手最可能不足的時段，因此適合採取放寬多開與門檻的政策。在沒有跨時段限制時，逐格貪婪即為最佳；加入個人時數上限後，問題可化為最小成本流，仍可有效求解；再加入連續與休息限制，則進入一般人員輪值問題的困難範疇。

第 八 章

討論：排班作為社會契約

8.1　效率與公平的雙重目標

第五、六章的結果可以濃縮為一句話：車隊排班的每一條規則，都是在效率與某種公平之間的取捨。倍率優先追求效率；級距與先報先上追求程序公平；不同人優先追求參與廣度；S6 優先追求角色分工。這些規則以字典序疊加，形成了一個在典型情況下效率損失很小（不同人優先不到 1%）、但在競爭激烈時分配高度不均（倍率優先下吉尼係數 0.28–0.41）的系統。

值得強調的是，這種不均並非缺陷，而是倍率優先制的設計本意：車隊的直接目的是讓跑者衝上名次，座位理應給最能幫上忙的人。問題在於，車隊同時也是一個依賴志願參與的社群。第六章的模擬顯示，在倍率優先制下，倍率最低的五分之一成員在 $\lambda = 8$ 時只有 11% 的上車率；若這些成員因此退出，車隊在人手不足的時段（特別是第七章所說價值最高的深夜）就更難排滿。效率最大化的規則，可能在長期侵蝕效率本身的基礎。

從 Ostrom（1990）的觀點，可持續的社群治理需要讓「規則」與「當地條件」相符，並讓受規則影響的人參與規則的制定。菜根機器人把排位順序、級距、多開政策都做成可由各車隊調整的設定，正是把規則選擇權交還給社群；本文的模擬結果，則可以作為車隊討論規則時的參考：人少時放寬、人多時講求參與、需要鼓勵早報名時加寬級距或改用先報先上。

8.2　誠實申報與聲譽

命題 5 指出，倍率優先制對倍率申報不是防策略的。在經濟學的機制設計中，常見的解法是設計「讓說實話成為最佳策略」的機制，例如以第二價格拍賣讓出價者沒有誇大的誘因。但車隊排班沒有金錢轉移，這類工具無法使用。實務中的替代方案是**驗證**與**聲譽**：管理員可以修改成員登記的倍率；房間裡的實際表現（例如跑者觀察到的分數）也會暴露誇大的申報；而在一個成員彼此熟識、長期互動的小社群裡，被發現誇大的代價遠高於一次多上車的好處。

這也解釋了為什麼車隊排班特別依賴「已確認」這一步：一般報名先是待確認、不佔座位，由管理員確認後才進入排位。確認步驟讓人的判斷（包括對成員可信度的判斷）在演算法之前把關。對照先報先上：它對倍率申報是防策略的，卻引入了另一種競爭——搶先報名。開班公告一出，成員必須立刻報名，否則就會落後；這對無法隨時在線的成員同樣不公平。沒有一種優先序能同時消除這兩種扭曲，這是機制設計中常見的不可能性的一個具體案例。

8.3　人在迴路中

演算法 1 是全自動的，但菜根機器人刻意保留了多處人工介入的空間：待確認制度、手動排位（被手動改過的時段不再整段重排）、車隊佔位，以及管理員可隨時換人。從 Dietvorst 等人（2015）的演算法厭惡研究來看，這些設計有其道理：當成員或管理員認為演算法「排錯了」時，若不能覆寫，他們很可能乾脆不用這個系統；而一旦覆寫被尊重，他們就願意在大多數時候讓演算法代勞。

然而，手動覆寫也是對命題 1（歷史無關性）的有意破壞：手動時段的結果取決於管理員何時、如何介入，而不只是當下的報名集合。這是一個合理的取捨，但車隊應該讓成員知道哪些時段是手動的，以維持可預測性。菜根機器人在班表上標示「手動」狀態，正是為了這個目的。

第五章揭露的邊界情況，也是人在迴路中的一個案例。規則的文字說明（「先讓每個人的第 1 開入座」）是人與人之間的契約；程式碼則是這份契約的執行。兩者不一致時，即使結果在效率上並不差，也會損害成員對規則的信任。這提醒工具開發者：形式化分析與模擬，不只能用來評估政策，也能用來檢查「程式碼是否做了我們說它會做的事」。

8.4　互惠、義務與健康

推手上車，直接受益的是跑者的名次。車隊之所以能維持，依賴的是互惠（今天我推你，下次你推我）、歸屬感與對跑者目標的認同。排班表因此不只是座位分配，也是一份**社會契約**：報了班就有準時上車的義務，臨時缺席（社群所稱的「鴿班」）會影響整台車。菜根機器人的簽到面板、開跑前提醒與鴿班紀錄，是把這份契約制度化的工具；鎖班與取消期限，則限制成員在開跑前臨時退出。

這些制度提高了可靠性，但也增加了成員的負擔。第七章指出夜間班次價值最高，這可能形成一種結構性的壓力：最重要的班次，恰好要求成員犧牲睡眠。我們認為，車隊與工具設計者應該把成員的休息視為一個明確的設計目標，而不是只追求滿座率。命題 6(c) 的連續上班與休息限制雖然讓最佳化變得困難，但「每人每天／連續上限」這類即使不最佳、卻能保護成員的規則，價值不應被低估。

8.5　研究限制

本文有三項主要限制。第一，模擬使用合成資料，政策比較的數值結論依賴於倍率分布、多開比例與報名人數的假設；報名行為被假設為外生，沒有考慮成員因政策而改變的行為。第二，本文分析的是單一機器人的排位程序，其他車隊或工具可能採用不同規則；而程序中有一個可設定函數的原始碼不在分析範圍內（5.4 節）。第三，班次價值的估計只使用了 10 期活動與 T100 的速率剖面，且混入了開跑與結算的效應。

第 九 章

結論

9.1　主要發現

RQ1　形式化。車隊排班可以形式化為一個帶有特殊座位（P2/S6）、多單位代理人（多開）與優先序的單格分配問題；實務中的排位程序是一個以倍率（或報名時間）為優先序、加上 S6 優先與兩階段多開政策的序列獨裁變體（演算法 1）。

RQ2　性質。此程序具有歷史無關性（命題 1），在沒有 S6 時具有族群單調性（命題 2）。倍率級距在單一序列情形下的效率損失每席不超過 δ（命題 3）；「不同人優先」相對於「一起比」的最壞效率比為 $(b_{\max}+2b_{\min}) \div 3b_{\max} \approx 0.536$ 且此界是緊的（命題 4）。程序對倍率申報不是防策略的，先報先上則以時間競爭取代申報誘因（命題 5）。形式分析同時揭露了一個規則衝突：P2 推手的第二開會在第一階段插隊，與政策說明不一致，並使命題 3 的上界在實作中失效；一致版修正可以恢復上界，並讓每格平均多 0.01–0.02 位成員上車。

RQ3　政策比較。在模擬中，倍率優先比先報先上的座位倍率總和高 0.9%（$\lambda = 2$）至 9.2%（$\lambda = 10$）；代價是上車機會高度集中，$\lambda = 6$ 時各倍率五分位的上車率從 23% 到 99%，吉尼係數 0.278（先報先上為 0.031）。不同人優先在典型情況下只犧牲不到 1% 的效率；不排多開在人少時代價高達 13.6%、人多時不到 1%。0.02 的級距幾乎不改變誰上車。

RQ4　時間維度。以相對於 T100 的排名收益衡量，凌晨 4 時的班次價值約為傍晚 18 時的 7.5 倍。沒有跨時段限制時，逐格貪婪即為全域最佳；加入個人時數上限後，問題可化為最小成本流；再加入連續與休息限制，則屬一般的 NP 困難輪值問題（命題 6）。

9.2　對實務的建議

1. **依時段調整政策：**人手不足的時段（尤其深夜）允許多開、放寬門檻；人手充裕時再追求倍率或參與廣度。
2. **讓規則說明與實作一致：**修正 P2 推手第二開的插隊，或在說明中明確寫出 P2 持有者的例外。
3. **關注低倍率成員的參與：**在競爭激烈的車隊，考慮保留部分座位以先報先上分配，或設定每人上車次數的軟上限，以維持志願參與的基礎。
4. **以全域重排處理時數上限：**在每日鎖班前以最小成本流重排次日班表，可以把高倍率成員的有限時數用在價值最高的時段。
5. **把休息當作設計目標：**保留並鼓勵使用每人每天與連續上限。

9.3 未來研究

三個方向特別值得延伸。第一，**內生的報名行為**：以代理人基模型或重複賽局，模擬成員如何依上車率決定是否報名，檢驗倍率優先制是否真的會導致低倍率成員退出、以及何種混合政策能在長期維持最高的總產出。第二，**實際班表資料**：在取得車隊同意並妥善去識別化之後，以實際的報名與上車紀錄校準模擬參數，並驗證第七章關於夜間人手不足的推論。第三，**跨時段的線上最佳化**：報名是陸續到達的，如何在不犧牲太多即時性與可預測性的前提下，逐步逼近命題 6(b) 的全域最佳解，是一個具有理論與實務價值的線上演算法問題。

9.4 結語

排班之所以被稱為一門藝術，是因為它要在冷冰冰的座位與倍率之間，照顧到一群活生生的人：想衝名次的跑者、願意陪跑的推手、倍率不高卻每晚都來報名的新人、以及凌晨四點還在線上的那幾位。本文嘗試把這門藝術的一部分寫成定義、命題與模擬，但它的另一部分——信任、互惠與彼此體諒——仍然只能由社群自己來實踐。好的規則與好的工具，能做的是讓這份實踐更公平、更透明，也更可持續。

參考文獻

Abdulkadiroğlu, A., & Sönmez, T. (1998). Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. *Econometrica*, 66(3), 689–701.

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (1993). *Network flows: Theory, algorithms, and applications*. Prentice Hall.

Benkler, Y. (2006). *The wealth of networks: How social production transforms markets and freedom*. Yale University Press.

Bertsimas, D., Farias, V. F., & Trichakis, N. (2011). The price of fairness. *Operations Research*, 59(1), 17–31.

Burke, E. K., De Causmaecker, P., Vanden Berghe, G., & Van Landeghem, H. (2004). The state of the art of nurse rostering. *Journal of Scheduling*, 7(6), 441–499.

Dietvorst, B. J., Simmons, J. P., & Massey, C. (2015). Algorithm aversion: People erroneously avoid algorithms after seeing them err. *Journal of Experimental Psychology: General*, 144(1), 114–126.

Ernst, A. T., Jiang, H., Krishnamoorthy, M., & Sier, D. (2004). Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models. *European Journal of Operational Research*, 153(1), 3–27.

Kücklich, J. (2005). Precarious playbour: Modders and the digital games industry. *Fibreculture Journal*, 5.

Olson, M. (1965). *The logic of collective action: Public goods and the theory of groups*. Harvard University Press.

Ostrom, E. (1990). *Governing the commons: The evolution of institutions for collective action*. Cambridge University Press.

Svensson, L.-G. (1999). Strategy-proof allocation of indivisible goods. *Social Choice and Welfare*, 16(4), 557–567.

Taylor, T. L. (2006). *Play between worlds: Exploring online game culture*. MIT Press.

Project SEKAI 資源中心研究組（2026）·《色彩、旋律與分數：《世界計畫 繽紛舞台！》台服的量化研究》· Project SEKAI 資源中心 ·

菜根機器人開發團隊（2026）·《菜根機器人排班系統說明》· Project SEKAI 資源中心 ·

附錄 A

模擬設定與重現

模擬以 Python 撰寫，只使用標準函式庫，亂數種子固定，可完全重現。排位函數依演算法 1 實作，並以下列對照確認與現行程序一致：S6 優先、多位 S6 時依 S6 倍率保留第一名並把其餘降為推手、P2 由 S6 或排序第一的推手第 1 開佔據、P2 推手的剩餘帳號依第 8–9 行處理、兩階段批次、候補依批次順序。未實作的部分為車隊佔位、同車第二跑者、最低上車倍率與手動標記。

表 A-1 完整模擬參數

項目	設定
成員池大小	40
第 1 開倍率	$N(2.7, 0.45^2)$，截斷於 [1.18, 3.88]
開數	三開 5%、雙開 20%、單開 75%
第 2、3 開倍率	第 1 開 − $U(0, 0.4)$，截斷
S6 能力	15% 的成員
以 S6 身分報名	具 S6 能力者每次報名機率 0.5
S6 倍率	第 1 開 + $U(-0.2, 0.3)$，截斷
每格報名人數	Poisson(λ)，上限為成員池大小，不重複抽取
報名時間	$U(0, 1)$
級距捨入	Python round()（與機器人相同）
政策實驗	每個 λ 與政策 20,000 格，種子 11
級距實驗	$\lambda = 6$，20,000 格，種子 5
公平性實驗	$\lambda \in \{4, 6, 8\}$，30,000 格，種子 3
效率比實驗	$\lambda = 4$，50,000 格，種子 9
邊界情況實驗	$\lambda \in \{4, 6, 8\}$，30,000 格，種子 21

上車率以「上車次數 ÷ 報名次數」計算，上車包括 P2–P5 任一座位。吉尼係數以成員的上車次數計算。效率指標「倍率總和」包含 P2 與 P3–P5 所有已入座單位的倍率。

附錄 B

一致版兩階段政策

演算法 1 的第 8–9 行改為下列寫法，即得到第五章所稱的一致版：P2 持有者的第 1 開已經入座，因此他的其餘帳號一律留到第二階段，與其他人的第 2、3 開一起依序補位。

演算法 2　一致版的第 8–9 行

```
8  若 i = i*：
       Extra 加入 [(i*,2), …, (i*,m_i*)]
       繼續下一位                              ▷ 不把第 2 開當成他的「第一個單位」
9  否則：First 加入 (i,1)；Extra 加入 [(i,2), …, (i,m_i)]
```

這個修改只影響「P2 由多開推手佔據」的時段，在模擬中占 1.7%–5.5%。其效果是讓政策的實際行為與「先讓每個人的第 1 開入座」的說明一致，並恢復命題 3 的級距損失上界；代價是平均每格倍率總和減少 0.004–0.007。車隊若認為 P2 持有者的第 2 開應享有優先，則應保留現行行為，並在規則說明中明列此一例外。